ÉNONCÉ

$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$

1. <u>Lem</u> : $\forall \alpha > 1, \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$

2. $\exists \gamma > 0, H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

LEÇONS.

223

224

230

RÉFS.

2. [G] Gourdon Analyse p. 203
1. [FGN1] Francinou Gianella Nicolas analyse 1 p. 102.

RÉSULTATS ASSOCIÉS

1. th. de sommation des équivalents

DÉMO

: à l'oral. : pour comprendre.

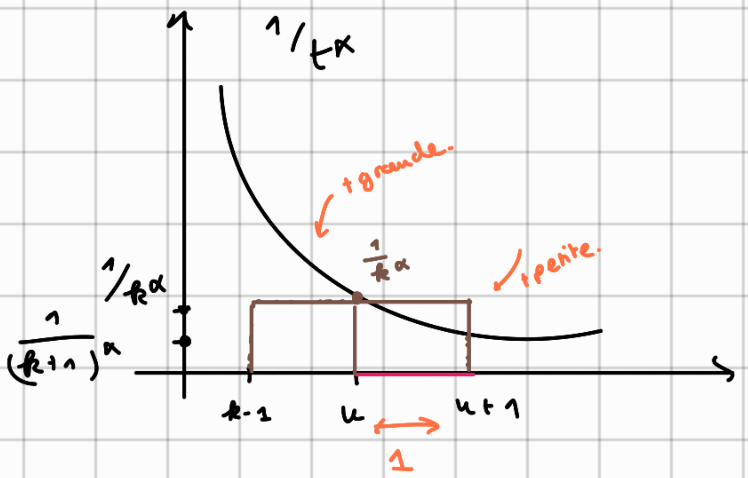
: écrit au tableau.

1 LEM : $\forall \alpha > 1, \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$

à la fin si temps.

DEM

. $\alpha > 1$. $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha} \in L^1([1,+\infty[)$ et décroît.



$\forall k \geq 1, \quad \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha} dt.$

par ce sale et le fait que $\int_k^{k+1} \text{const} = \text{const}$.

$\forall N > n+1, n \in \mathbb{N}$:

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^N \frac{1}{t^\alpha} dt \qquad \text{(Chasles)}$$

or, $\int_n^N \frac{1}{t^\alpha} dt = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_n^N \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

Donc par $N \to +\infty$: $\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$

D'où le rés par th gendarmes

2. Dév Asymptot de $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Convergence :

. $(H_n) \nearrow$ (somme de termes ≥ 0) → donc CV vers lim $\mathbb{R}$ ou ∞. mq ∞.

. mq (H_n) n'est pas de Cauchy.

$\forall n \geq 1, \quad |H_{2n} - H_n| = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}(2n-n-1+1) \geq \frac{1}{2}$.

$n+1 \leq k \leq 2n$

$\frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}$

H_n n'est pas de Cauchy (si suite CV est de Cauchy).

on a trouvé 2 termes dont la diff $\not\to 0$.

Donc $H_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

1e terme :

On a : $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ Th. Sommation des équiv.

Or, $\sum_{n\geq 1} \underbrace{\frac{1}{n}}_{\geq 0}$ diverge donc par le TSE,

Σ télescopique

$$H_n \sim \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(n+1) - \ln(1).$$

$$\boxed{\text{Donc } H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)}$$

2e / 3e terme

Posons $u_n = H_n - \ln(n)$. $\forall n \geq 1$ $\left(u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(\ln(n))\right)$

Pr préciser le $o(\ln(n))$ on voudrait un équiv. de u_n.

Or, le TSE nous donne des équiv sur les séries.

Mais on fait lien entre séries et suites via Σ télescopiques : on donc diff. entre 2 termes consécutifs.

$$u_n = \sum_{k=2}^{n} (u_k - u_{k-1}) + u_1$$

$$\begin{aligned} u_n - u_{n-1} &= \frac{1}{n} - \ln(n) + \ln(n-1) \\ &= \frac{1}{n} + \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2} \end{aligned}$$

je veux utiliser TSE sur les restes.

Je vais faire un DL et m'arrêter qd j'aurai obtenu le TG d'une série CV.

Et $\sum_{n\geq 1} \underbrace{-\frac{1}{2n^2}}_{\leq 0}$ CV donc

* (u_n) converge vers une lim γ

on a ~ des restes

* par le TSE $\underbrace{\lim_{n\to+\infty} u_n}_{=\gamma} - u_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k - u_{k-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$ par $\underline{\text{IEn}}$.

car $r_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

$$\text{Donc } \boxed{H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

__3e ordre :__ ĉ préc.

Posons $w_n = u_n - \gamma - \frac{1}{2n} = o(1)$, $n \geq 1$

$\forall n$, $w_n - w_{n-1} = u_{n+1} - u_n - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n(1-\frac{1}{n})}$

je vois que le $-\frac{1}{2n^2}$ se compense donc je pousse le DL + loin

$$= \cancel{-\frac{1}{2n^2}} - \frac{1}{3n^3} \cancel{-\frac{1}{2n}} + \frac{1}{2n}\left(\cancel{1} + \cancel{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$= \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \qquad \left(\frac{1}{2n^3} - \frac{1}{3n^3}\right) = \frac{3-2}{6n^3}$$

Et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$ cv.

Par le TSE $-w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{6k^3} \sim \frac{1}{12n^2}$.

comme préc

Donc $\boxed{H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$